

# Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 1

SoSe 2015

Abgabe: 23.04.2015

---

## [H1] Exponentialfunktion einer Matrix

(4 Punkte)

Auch für Matrizen definiert man die Exponentialfunktion:

$$\exp M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n.$$

- (a) Sei  $M$  eine konstante Matrix. Zeigen Sie, dass die Lösung der Differentialgleichung  $\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = iM\vec{x}(t)$  durch  $\vec{x}(t) = \exp(itM)\vec{x}(0)$  gegeben ist.
- (b) Sei  $M$  eine spurlose, imaginäre  $2 \times 2$ -Matrix und deshalb eine Linearkombination der drei Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der  $M_i$  sind hermitesch, welche antihermitesch?

Berechnen Sie  $U_i = \exp(itM_i)$ ; welche der  $U_i$  sind unitär?

Verifizieren Sie für die drei Fälle die Beziehung  $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$ .

## [H2] Basistransformationen

(3 Punkte)

Es bezeichnen  $|x'(\theta)\rangle$  und  $|y'(\theta)\rangle$  die Basisvektoren eines um den Winkel  $\theta$  bzgl. der  $(x, y)$ -Basis gedrehten Koordinatensystems. Man zeige, dass die Komponenten  $\langle x'(\theta)|\psi\rangle$ ,  $\langle y'(\theta)|\psi\rangle$  eines Vektors  $|\psi\rangle$  in dieser Basis die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial}{\partial \theta} \langle x'(\theta)|\psi\rangle &= \langle x'(\theta)|S|\psi\rangle, \\ -i \frac{\partial}{\partial \theta} \langle y'(\theta)|\psi\rangle &= \langle y'(\theta)|S|\psi\rangle, \end{aligned}$$

erfüllen (wobei  $S = M_2$  aus Aufgabe [H1](b)). Konstruieren Sie die explizite Lösung dieser Dgl. für  $|\psi\rangle = |R\rangle$  und  $|\psi\rangle = |L\rangle$ . ( $|R\rangle$  und  $|L\rangle$  wie in der Vorlesung.)

Bitte wenden

**[H3] Aufspaltung eines Atomstrahls****(3 Punkte)**

Jemand experimentiert mit einem Strahl von Helium-Atomen im angeregten  $^3S_1$  Triplett-Zustand (Elektron-Konfiguration  $1s2s$ , Kernspin 0). Die Atome werden demnach durch Zustandsvektoren in  $\mathbb{C}^3$  charakterisiert. In einer geeigneten Basis wird die benutzte Stern-Gerlach-Messapparatur durch die Matrix

$$M \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Sie spaltet den Atomstrahl auf in drei Teile, deren Atome sich dann jeweils in den Eigenzuständen

$$|\rightarrow\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\circ\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\leftarrow\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

befinden. Die drei Teilstrahlen passieren unmittelbar darauf eine zweite, identische Messapparatur, welche gegenüber der ersten um  $90^\circ$  gedreht ist. Diese Drehung ist in  $\mathbb{C}^3$  realisiert durch die Matrix

$$\mathcal{R} \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

so dass der zweite Satz von Eigenzuständen lautet

$$|\uparrow\rangle = \mathcal{R}|\rightarrow\rangle, \quad |\bullet\rangle = \mathcal{R}|\circ\rangle, \quad |\downarrow\rangle = \mathcal{R}|\leftarrow\rangle.$$

Bestimmen Sie die Intensitäten  $W_{\alpha i}$  mit  $i = \rightarrow, \circ, \leftarrow$  und  $\alpha = \uparrow, \bullet, \downarrow$  der neun Teilstrahlen nach der zweiten Aufspaltung.